ヴェイグ・マックス順序を用いた基本的なオークションの定式化 (不確実な状況における意思決定の理論と応用)

数理解析研究所講究録
第 1589 巻 2008 年 187-194

ヴェイグ・マックス順序を用いた基本的なオークションの定式化

金沢学院大学・経営情報学部 桑野 裕昭 (Hiroaki Kuwano)
Faculty of Business Administration and Information Science,
Kanazawa Gakuin University

1 はじめに

1965 年に L.A. Zadeh によってファジィ集合が提案されてから既に 40 年以上が経過している [18]. その集合概念は二値論理に対応する古典的な集合論を拡張したものであったが, そのファジィ集合の概念も現在に至るまでに更なる拡張が試みられた. 例えば, Zadeh 自身によるタイプタイプ n ファジィ集合 (fuzzy sets of type n, [19]) や, K.T. Atanassov による直観的ファジィ集合*(intuitionistic fuzzy sets, [2]), W.-L. Gau と D.J. Buehrer によるヴェイグ集合 (vague set, [9]), 区間値ファジィ集合 (interval-valued fuzzy sets, 例えば [6]) など多くが知られている. 上記の Atanassov の直観的ファジィ集合と Gau-Buehrer のヴェイグ集合については同値であることが H. Bustince と P. Burillo によって示されている ([4]) ことや名称について議論が存在する ([3, 7, 8, 10]) ことについては, 既に桑野 [21] によって述べられている通りである.

以下では, 桑野 [21] に従い, ファジィ集合の一般化のひとつである W.-L. Gau と D.J. Buehrer のヴェイグ集合を用いて, ヴェイグ数を評価値として許す基本的なオークション・モデルの定式化及び解概念について考察する. その考察において Kuwano[13] 及び桑野 [20] において行ったファジィ・オークション・モデルの構築に関する議論が自然にヴェイグ・オークション・モデルにも適用できることを示していく. このモデルで考える状況は, 入札対象に対して十分な知識を持たず, 入札対象に対する評価が「だいたいこの程度の評価であろう」という評価, 及び, 逆の評価「これぐらい以下, あるいは, これぐらい以上ではないであろう」という 2 つの不確定な評価をもつ 2 人のプレイヤーによるオークションであり, このような状況下における第一価格オークション及び第二価格オークションである.

* ここでは, 桑野 [21] に従い, Atanassov の Intuitionistc fuzzy set を直観的ファジィ集合と呼び, 竹内-千谷の直観主義的ファジィ集合 [15] と区別する.

2 準備

本節では基本的な定義について簡単に確認しておく.

2.1 ファジィ数とファジィ・マックス順序

ファジィ数に関してはさまざまな定義が知られているが, ここでは以下の定義を採用する.

定義 2.1. $\tilde{a}$ を実数全体からなる集合 $\mathbb{R}$ 上のファジィ集合とし, それを特徴づけるメンバーシップ関数を $\mu_{\tilde{a}} : \mathbb{R} \to [0,1]$ とする. このとき, ファジィ集合 $\tilde{a}$ がファジィ数であるとは, 以下の条件を満足するときである.

(i) $\mu_{\tilde{a}}$ は準凹関数である.

(ii) $\mu_{\tilde{a}}$ は上半連続関数ある.

(iii) $\mu_{\tilde{a}}(x^1) = 1$ を満たす実数 x^1 が唯一つ存在する.

(iv) $\mathrm{cl}\,\{x \in \mathbb{R} \mid \mu_{\tilde{a}}(x) > 0\}$ は有界集合である. ここで, $\mathrm{cl}(A)$ は集合 A の閉包を表す.

これらファジィ数の比較に関してはいくつかの研究がなされている (例えば, Adam[1], Campos et al.[5], Tanaka et al.[16] や Yager[17] を参照のこと). そのうちファジィ数の比較基準として最も有名なものの一つにファジィ・マックス順序が知られている. これは 1985 年に Ramík と Římánek によって提案されたもので, 次のように定義される ([14]).

定義 2.2 ([14]). $\tilde{a}, \tilde{b}$ をファジィ数とする. このとき, 二項関係 $\preceq$ がファジィ・マックス順序であるとは, 各 $\alpha \in [0,1]$ に対して不等式 $[\tilde{a}]^\alpha \leqslant_{\mathbb{R}_+} [\tilde{b}]^\alpha$ が満たされるときをいう. また, この条件が成り立つとき, $\tilde{a} \preceq \tilde{b}$ と表す. ここで, $[\tilde{a}]^\alpha, [\tilde{b}]^\alpha$ はそれぞれファジィ数 $\tilde{a}, \tilde{b}$ の α-レベル集合を表している. ($\succeq$ も同様に定義することができる.)

次の定義も一般的に良く知られている.

定義 2.3. $\mathbb{R}^n$ 上で定義されたファジィ集合 $\tilde{a}$ のメンバーシップ関数が準凹関数であるとき, $\tilde{a}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の凸ファジィ集合と呼ばれる.

Kurano at el.[12] では $\mathbb{R}^n$ 上の凸ファジィ集合間に次の擬順序が提案された.

定義 2.4 ([12]). $\tilde{a}, \tilde{b}$ を $\mathbb{R}^n$ 上で定義された凸ファジィ集合とし, K を $\mathbb{R}^n$ の非空, 凸かつ pointed な錐とする. このとき, 拡張されたファジィ・マックス順序 $\tilde{a} \preceq_K \tilde{b}$ は以下の条件によって定義される.

(i) 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $x \leqslant_K y$ かつ $\mu_{\tilde{a}}(x) \leqslant \mu_{\tilde{b}}(y)$ を満たす $y \in \mathbb{R}^n$ が存在する.

(ii) 任意の $y \in \mathbb{R}^n$ に対して $x \leqslant_K y$ かつ $\mu_{\tilde{a}}(x) \geqslant \mu_{\tilde{b}}(y)$ を満たす $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する.

この擬順序の名称である「拡張されたファジィ・マックス順序」は「$\tilde{a} \leq_K \tilde{b}$ とすべての $\alpha \in (0,1]$ に対して $[\tilde{a}]^\alpha \leqslant_K [\tilde{b}]^\alpha$ が成立することは同値である」([12]) という事実に基づいている.

2.2 ファジネスのヴェイグネスへの自然な拡張

まず, Gau-Buehrer によるヴェイグ集合の定義を示す.

定義 2.5 ([9]). 対象全体からなる集合を X によって表し, その一般元を x によって表現する.

このとき, 集合 X 上のヴェイグ集合 $\tilde{v}$ は以下の 2 つのメンバーシップ関数によって特徴づけられる.

(i) **真値メンバーシップ (*truth-membership*) 関数** $t_{\tilde{v}}$: $t_{\tilde{v}}(x)$ は x が $\tilde{v}$ に帰属するグレードの最小値を表す.

(ii) **偽値メンバーシップ (*false-membership*) 関数** $f_{\tilde{v}}$: $f_{\tilde{v}}(x)$ は x が $\tilde{v}$ に帰属しないグレードの最小値を表す.

また, すべての $x \in X$ に対して $t_{\tilde{v}}(x) + f_{\tilde{v}}(x) \leqslant 1$ が成り立つものとする.

注意 2.1. 最後の条件式 $t_{\tilde{v}}(x) + f_{\tilde{v}}(x) \leqslant 1$ $(\forall x \in X)$ は, すべての $x \in X$ に対して $0 \leqslant t_{\tilde{v}}(x) \leqslant 1 - f_{\tilde{v}}(x) \leqslant 1$ が成り立つことを意味し, さらに, 区間値ファジィ集合としてヴェイグ集合を見なしたときには $x \in X$ の区間値メンバーシップ関数の値が $[t_{\tilde{v}}(x), 1 - f_{\tilde{v}}(x)]$ によって与えられることを意味している.

ヴェイグ・オークションで用いる不確定な評価を表現するため, ヴェイグ数及び凸ヴェイグ集合の定義を与える.

定義 2.6 ([21]). $\tilde{a}$ を実数全体からなる集合 $\mathbb{R}$ 上のヴェイグ集合とし, それを特徴づける真値メンバーシップ関数, 偽値メンバーシップ関数をそれぞれ $t_{\tilde{a}} : \mathbb{R} \to [0,1]$, $f_{\tilde{a}} : \mathbb{R} \to [0,1]$ とする. このとき, ヴェイグ集合 $\tilde{a}$ がヴェイグ数であるとは, 以下の条件を満足するときである.

(i) $t_{\tilde{a}}$ は準凹関数, かつ, $f_{\tilde{a}}$ は準凸関数である.

(ii) $t_{\tilde{a}}$ は上半連続関数, かつ, $f_{\tilde{a}}$ は下半連続関数である.

(iii) $t_{\tilde{a}}(x^1) = 1$, $f_{\tilde{a}}(x^1) = 0$ を同時に満たす実数 x^1 が唯一つ存在する.

(iv) $\mathrm{cl}\,\{x \in \mathbb{R} | t_{\tilde{a}}(x) > 0\}$ 及び $\mathrm{cl}\,\{x \in \mathbb{R} | f_{\tilde{a}}(x) < 1\}$ は有界集合である.

定義 2.7. 集合 X 上のヴェイグ集合 $\tilde{v}$ の真値メンバーシップ関数，偽値メンバーシップ関数をそれぞれ $t_{\tilde{v}}, f_{\tilde{v}}$ とする．このとき，$t_{\tilde{v}}, 1-f_{\tilde{v}}$ が準凹関数であれば，$\tilde{v}$ を凸ヴェイグ集合とよぶ．

注意 2.2. 上の定義で明らかなようにヴェイグ数はファジィ数の拡張概念となっており，区間値メンバー シップ関数をもつファジィ数として捉えることができる．また，ファジィ数が凸ファジィ集合であるように，ヴェイグ数は凸ヴェイグ集合である．

定義 2.8. $\tilde{a}, \tilde{b}$ を $\mathbf{R}^n$ 上で定義された凸ヴェイグ集合とし，K を $\mathbf{R}^n$ の非空，凸かつ pointed な錐とする．このとき，ヴェイグ・マックス順序 $\tilde{a} \preceq_K \tilde{b}$ は以下の条件によって定義される．

(i) 任意の $x \in \mathbf{R}^n$ に対して $x \leqslant_K y, t_{\tilde{a}}(x) \leqslant t_{\tilde{b}}(y), f_{\tilde{a}}(x) \geqslant f_{\tilde{b}}(y)$ を同時に満たす $y \in \mathbf{R}^n$ が存在する．

(ii) 任意の $y \in \mathbf{R}^n$ に対して $x \leqslant_K y, t_{\tilde{a}}(x) \geqslant t_{\tilde{b}}(y), f_{\tilde{a}}(x) \leqslant f_{\tilde{b}}(y)$ を同時に満たす $x \in \mathbf{R}^n$ が存在する．

上記の定義によって，ファジィ・マックス順序が自然にヴェイグ集合に対しても拡張され，ヴェイグ数の組に対しても適用することが可能となる．

3 ヴェイグ・オークション・モデル

第一価格オークション及び第二価格オークションは基本的なオークション・モデルの中でも最も知られたものである (例えば，[11] を参照のこと)．

第一価格オークション 封印入札の形態をとり，最も高額な入札を行った入札者が自分の行った入札額を支払い入札対象物を得るオークション

第二価格オークション 封印入札の形態をとり，最も高額な入札を行った入札者が 2 番目に高い入札額を支払い入札対象物を得るオークション

簡単のため，ここでは 2 人ゲームとして第一価格オークション及び第二価格オークションを定式化するための記号を導入しておく．以下では $A = \{a_1, \ldots, a_\ell\}$ をプレイヤー I の可能な入札額全体からなる集合とし，$B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ をプレイヤー II の可能な入札額全体からなる集合とする．また，入札額には $a_1 < \cdots < a_\ell$ 及び $b_1 < \cdots < b_m$ なる仮定をおき，ヴェイグ数 $\tilde{a}, \tilde{b}$ によりプレイヤー I, II それぞれの評価を表すこととする．

各プレイヤーの入札額は実数で行われることとなるが，プレイヤーの持つ不確定な評価値としてのヴェイグ数とその実数との差を定義する必要がある．

定義 3.1. r を実数とし，$\tilde{v}$ をヴェイグ数，その真値メンバーシップ関数及び偽値メン

バーシップ関数をそれぞれ $t_{\tilde{v}} : \mathbb{R} \to [0,1]$, $f_{\tilde{v}} : \mathbb{R} \to [0,1]$ とする．このとき，その差 $\tilde{v} - r$ を真値メンバーシップ関数 $t_{\tilde{v}-r}(x) = t_{\tilde{v}}(x-r)$, $x \in \mathbb{R}$ と偽値メンバーシップ関数 $f_{\tilde{v}-r}(x) = f_{\tilde{v}}(x-r), x \in \mathbb{R}$ とによって特徴づけるものとする．

注意3.1. より一般にヴェイグ数について，加法やスカラー積を定義することができるが，ここでは限定的な定義を与えるにとどめる．また，対象三角型ヴェイグ数に関する加法及びスカラー積については [21] を参照のこと．

■第一価格オークション 利得双行列を $\tilde{P}$ で表す．その各要素 $\tilde{p}_{ij} = \left(\tilde{p}^{I}_{ij}, \tilde{p}^{II}_{ij}\right)$, $i = 1,\ldots,\ell$, $j = 1,\ldots,m$ はプレイヤー I, II の利得の組を表し，それぞれは

$$\tilde{p}^{I}_{ij} = \begin{cases} \tilde{a} - a_i, & a_i \geqslant b_j \text{のとき}, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}, \qquad i = 1,\cdots,\ell,\ j = 1,\cdots,m$$

及び

$$\tilde{p}^{II}_{ij} = \begin{cases} \tilde{b} - b_j, & a_i \leqslant b_j \text{のとき}, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}, \qquad i = 1,\cdots,\ell,\ j = 1,\cdots,m$$

によって定義される．

■第二価格オークション この場合にも第一価格オークション同様に利得双行列を定義しなければならない．第二価格オークションについては利得双行列を $\tilde{Q}$ で表す．その各要素 $\tilde{q}_{ij} = \left(\tilde{q}^{I}_{ij}, \tilde{q}^{II}_{ij}\right)$, $i = 1,\ldots,\ell$, $j = 1,\ldots,m$ は $\tilde{P}$ の場合と同様にプレイヤー I, II の利得の組を表すが，その定義は以下で示すようにそれとは異なっている．定義は以下の通り．

$$\tilde{q}^{I}_{ij} = \begin{cases} \tilde{a} - b_j, & a_i \geqslant b_j \text{のとき}, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}, \qquad i = 1,\cdots,\ell,\ j = 1,\cdots,m$$

及び

$$\tilde{q}^{II}_{ij} = \begin{cases} \tilde{b} - a_i, & a_i \leqslant b_j \text{のとき}, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}, \qquad i = 1,\cdots,\ell,\ j = 1,\cdots,m.$$

3.1 支配戦略

支配戦略均衡は通常のオークションの理論において最も基本的な均衡概念の一つである．そこで，以下では，ヴェイグ・オークション・モデルにおける支配性をヴェイグ・マックス順序を用いて導入する．

ここでは第一価格オークションについて調べるが，同様の議論を第二価格オークションについても得ることができる．このとき，順序錐 $K^m \subseteq \mathbb{R}^m$, $K^\ell \subseteq \mathbb{R}^\ell$ は $K^m = \mathbb{R}^m_+, K^\ell = \mathbb{R}^\ell_+$

によって与えられているとする．また，入札額 $a_i, i = 1,\ldots,\ell$ を戦略と同一視する．利得双行列 $\widetilde{P}$ 及びプレイヤー I, II それぞれの利得行列 $\widetilde{P}^I, \widetilde{P}^{II}$ を表示すると次のようになる．

$$\widetilde{P} = (\widetilde{p}_{ij}) = \begin{pmatrix} (\widetilde{p}^I_{11}, \widetilde{p}^{II}_{11}) & (\widetilde{p}^I_{12}, \widetilde{p}^{II}_{12}) & \cdots & (\widetilde{p}^I_{1m}, \widetilde{p}^{II}_{1m}) \\ (\widetilde{p}^I_{21}, \widetilde{p}^{II}_{21}) & (\widetilde{p}^I_{22}, \widetilde{p}^{II}_{22}) & \cdots & (\widetilde{p}^I_{2m}, \widetilde{p}^{II}_{2m}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\widetilde{p}^I_{\ell 1}, \widetilde{p}^{II}_{\ell 1}) & (\widetilde{p}^I_{\ell 2}, \widetilde{p}^{II}_{\ell 2}) & \cdots & (\widetilde{p}^I_{\ell m}, \widetilde{p}^{II}_{\ell m}) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{P}^I = \begin{pmatrix} \widetilde{p}^I_{11} & \widetilde{p}^I_{12} & \cdots & \widetilde{p}^I_{1m} \\ \widetilde{p}^I_{21} & \widetilde{p}^I_{22} & \cdots & \widetilde{p}^I_{2m} \\ \vdots & & & \\ \widetilde{p}^I_{\ell 1} & \widetilde{p}^I_{\ell 2} & \cdots & \widetilde{p}^I_{\ell m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{p}^I_1 \\ \widetilde{p}^I_2 \\ \vdots \\ \widetilde{p}^I_\ell \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \widetilde{p}^I_i = \begin{pmatrix} \widetilde{p}^I_{i1} & \widetilde{p}^I_{i2} & \cdots & \widetilde{p}^I_{im} \end{pmatrix},\ i = 1,\ldots,\ell,$$

$$\widetilde{P}^{II} = \begin{pmatrix} \widetilde{p}^{II}_{11} & \widetilde{p}^{II}_{12} & \cdots & \widetilde{p}^{II}_{1m} \\ \widetilde{p}^{II}_{21} & \widetilde{p}^{II}_{22} & \cdots & \widetilde{p}^{II}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{p}^{II}_{\ell 1} & \widetilde{p}^{II}_{\ell 2} & \cdots & \widetilde{p}^{II}_{\ell m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{p}^{II}_1 & \widetilde{p}^{II}_2 & \cdots & \widetilde{p}^{II}_m \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \widetilde{p}^{II}_j = \begin{pmatrix} \widetilde{p}^{II}_{1j} \\ \widetilde{p}^{II}_{2j} \\ \vdots \\ \widetilde{p}^{II}_{\ell j} \end{pmatrix},\ j = 1,\ldots,m.$$

定義 3.2.

- プレイヤー I について，戦略 a_i がヴェイグ・マックス順序の意味で戦略 a_k を支配するとは，$\widetilde{p}^I_k \leqslant \widetilde{p}^I_i$ が成り立つときをいう．
- プレイヤー II について，戦略 b_j がヴェイグ・マックス順序の意味で戦略 b_k を支配するとは，$\widetilde{p}^{II}_k \leqslant \widetilde{p}^{II}_j$ が成り立つときをいう．

定義 3.3. プレイヤー I, II それぞれに支配戦略 a^*_i, b^*_j が存在するとき，戦略対 (a^*_i, b^*_j) を支配戦略均衡と呼ぶ．

命題 3.1. *支配戦略均衡が存在すれば一意である．*

4 まとめ

本稿においてはファジィ数およびファジィ・マックス順序の自然な拡張としてヴェイグ数，ヴェイグ・マックス順序を定義し，それらを用いてヴェイグ数によって表現される不確定な評価を持つプレイヤーによる 2 人ゲームとしてヴェイグ・オークション・モデルを提案した．その解として支配戦略均衡を考えた場合，従来の結果と同様の結果を導けることを示した．今後は，他の解概念の導入や繰り返し入札が行われるようなモデルについて考察したい．

参考文献

[1] Adamo, J.M. (1980) "Fuzzy decision trees," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 4, pp. 207–219.

[2] Atanassov, K.T. (1986) "Intuitionistic Fuzzy Sets," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 20, pp. 87–96.

[3] ——— (2005) "Answer to D. Dubois, S. Gottwald, P. Hajek, J. Kacprzyk, and H. Prade's paper "Terminological difficulties in fuzzy set theory — The case of "Intuitionistic Fuzzy Sets" "," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 156, pp. 496–499.

[4] Bustince, H. and P. Burillo (1996) "Vague sets and intuitionistic fuzzy sets," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 79, pp. 403–405.

[5] Campos, L., A. Gonzales, and M.-A. Vila (1992) "On the use of the ranking function approach to solve fuzzy matrix game in a direct way," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 49, No. 193-203.

[6] Deschrijver, G. and E.E. Kerre (2005) "Implicators based on binary aggregation operators in interval-valued fuzzy set theory," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 153, pp. 229–248.

[7] Dubois, D., Gottwald S., P. Hajek, J. Kacprzyk, and H. Prade (2005) "Terminological difficulties in fuzzy set theory — The case of "Intuitionistic Fuzzy Sets"," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 156, pp. 485–491.

[8] García, J.G. and S.E. Rodabaugh (2005) "Order-theoretic, topological, categorical redundancies of interval-valued sets, grey sets, vague sets, interval-valued "intuitionistic" sets, "intuitionistic" fuzzy sets and topologies," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 156, pp. 445–484.

[9] Gau, W.-L. and D.J. Buehrer (1993) "Vague Sets," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. 23, No. 2, pp. 610–614.

[10] Grzegorzewski, P. and Mrówka (2005) "Some notes on (Atannassov's) intuitionistic fuzzy sets," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 156, pp. 492–495.

[11] Krishna, V. (2002) *Auction Theory*, San Diego: CA: Academic Press.

[12] Kurano, M., M. Yasuda, J. Nakagami, and Y. Yoshida (2000) "Ordering of convex fuzzy sets – A brief survey and new results," *J. Operations Research Society of Japan*, Vol. 43, pp. 138–148.

[13] Kuwano, Hiroaki (2003) "An Application to Basic Auction Models of Fuzzy Ordering," in *Proceedings of the Asia Pacific Management Conference*, Vol. 2, pp. 503–510.

[14] Ramík, J. and J. Římánek (1985) "Inequality relation between fuzzy numbers and its

use in fuzzy optimization," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 16, pp. 123–138.

[15] Takeuti, G. and S. Titani (1984) "Intuitionistic fuzzy logic and intuitionistic fuzzy set theory," *J. Symbolic Logic*, Vol. 49, No. 3, pp. 851–866, Sept.

[16] Tanaka, H., H. Ichihashi, and K. Asai (3) "A formulation of fuzzy linear programming problem based on comparison of fuzzy numbers," *Control and Cybernetics*, pp. 185–194.

[17] Yager, R.R. (1981) "A procedure of ordering fuzzy subsets of the unit interval," *Inform. Sci.*, Vol. 24, pp. 143–161.

[18] Zadeh, L.A. (1965) "Fuzzy Sets," *Information and Control*, Vol. 8, pp. 338–353.

[19] ——— (1975) "The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning-I," *Information Science*, Vol. 8, pp. 199–249.

[20] 桑野裕昭 (2004) 「ファジィ集合に関する順序関係の基本的なオークションモデルへの応用」,『京都大学数理解析研究所講究録』, 第 1373 号, 263–268 頁.

[21] ——— (2007) 「ヴェイグ線形計画問題」,『京都大学数理解析研究所講究録』, 第 1559 号, 93–105 頁.